

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie dynamischer Systeme	5
2.1	Dynamische Systeme	5
2.2	Chaotische dynamische Systeme - Komplexität	6
2.3	Rekonstruktion des Zustandsraumes	7
3	Lineare und nichtlineare Zeitreihenanalyse	10
3.1	Einleitung	10
3.2	Lineare charakterisierende Maße	12
3.2.1	Statistische Momente	12
3.2.2	Frequenzspektrum	13
3.2.3	Vom Frequenzspektrum abgeleitete charakterisierende Maße	15
3.3	Nichtlineare charakterisierende Maße	17
3.3.1	Coarse grained flow average	17
3.3.2	Effektive Korrelationsdimension - Neuronaler Komplexitätsverlust	19
3.4	Die Methode der Surrogate	22
3.5	Verwendung der Surrogate und Kombination mit charakterisierenden Maßen	30
3.5.1	Methodische Vorarbeiten zur Verwendung von Surrogaten	30
3.5.2	Test auf schwache Stationaritäten	33
3.5.3	Anteile nichtlinearer Determinismen: ξ -Maße	35
4	Das Elektroenzephalogramm	38
4.1	Prächirurgische Epilepsiediagnostik	38
4.2	Die hirnelektrische Aktivität als Messgröße	41
4.3	Das dynamische System Gehirn	45
5	Stand der Forschung	49

6	Ergebnisse	54
6.1	Einleitung	54
6.2	EEG-Testblock	56
6.2.1	Ergebnisse für beispielhafte EEG-Zeitreihen	56
6.2.2	Ergebnisse für den EEG-Testblock	60
6.3	Charakterisierung der räumlichen Verteilung des epileptogenen Prozesses .	68
6.3.1	Bestimmung der epileptogenen Hemisphäre bei MTLE	69
6.3.2	Lokalisation des epileptogenen Areals bei NLE	80
6.3.3	Einfluss der Schlafstadien	85
6.4	Charakterisierung der zeitlichen Variabilität des epileptogenen Prozesses .	91
7	Zusammenfassung	97
8	Diskussion	100

1 Einleitung

Die belebte und unbelebte Natur besteht aus einer Vielzahl dynamischer Systeme und ihrem Zusammenspiel. Ein zentrales Konzept der Naturwissenschaften ist es, durch die Analyse des Zeitverhaltens dieser Systeme geeignete Modelle für ihre Dynamiken zu bilden. Ein solches Modell kann zum Beispiel in Form eines Satzes von Differentialgleichungen formuliert werden. Durch Integration der Differentialgleichungen und Variation der Modellparameter kann versucht werden, die verschiedenen Zustände der Dynamik zu simulieren. Gelingt dies nicht, muss das Modell modifiziert, erweitert oder neu formuliert werden. Ist ein geeignetes Modell für ein dynamisches System gefunden, kann dieses genutzt werden, um das zukünftige Verhalten des Systems zu beschreiben.

So kann mit Sicherheit bestimmt werden, wann die nächste Sonnenfinsternis auftreten wird. Vorhersagen des Wetters sind allerdings häufig von einer hohen Irrtumswahrscheinlichkeit. Dies zu ändern, strebte der Meteorologe Lorenz an, als er ein einfaches System von drei gekoppelten Differentialgleichungen als ein Modell für thermische Konvektionsströmungen aufstellte [Lorenz 1963]. Diese Arbeit war zwar insofern ein Misserfolg, als dass die Lösungen der Differentialgleichungen selbst bei kleinsten Änderungen der Anfangswerte einen gänzlich anderen Verlauf nahmen, und somit über diesen Ansatz keine Verbesserung der Güte von Wettervorhersagen zu erreichen war. Trotzdem hatte Lorenz ein Modellsystem geschaffen, welches, gekennzeichnet durch seine sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, zu einem in zahlreichen Studien untersuchten Standardbeispiel für deterministisches Chaos wurde.

In der Folgezeit wurde die Theorie des deterministischen Chaos [Schuster 1989] anhand der Untersuchung einer Reihe weiterer Modellsysteme entwickelt. Ferner fanden sich in Bereichen wie der Laserphysik [Hübner et al. 1993], Hydrodynamik [Brandstätter et al. 1983] und Chemie [Roux et al. 1981] reale Dynamiken, deren Zeitverhalten sich als chaotisch erwies. Trotz einer einfachen Struktur zeigen diese Dynamiken ein kompliziertes und aufgrund der sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen auf langen Zeitskalen praktisch nicht vorhersagbares Verhalten. Als notwendige Voraussetzung für diese deterministische Komplexität [Procaccia 1988] erwiesen sich Nichtlinearitäten der Dynamiken. Zur Untersuchung der für solche Systeme spezifischen Eigenschaften wurde mit der nichtlinearen Zeitreihenanalyse [Kantz und Schreiber 1997] ein umfassendes Instrumentarium

geschaffen.

Ihre Anwendung auf verschiedenste Dynamiken aus den Bereichen der Meteorologie [Nicolis und Nicolis 1984], der Ökonomie [Anderson et al. 1988] oder der Biologie [Schaffer 1984] rief eine Reihe von Kritikern auf den Plan, die einwendeten, dass das Konzept des deterministischen Chaos nicht als omnipotentes Mittel zur Beschreibung komplizierter Naturphänomene mit erraticischem Zeitverhalten missverstanden werden sollte. So stellte Procaccia [1988] die Frage „Komplex oder bloß kompliziert?“. Zunehmend wurde deutlich, dass Nichtlinearität eine notwendige aber nicht hinreichende Voraussetzung für Chaos darstellt. Auf der anderen Seite war es aber gerade die Kompliziertheit der natürlichen Dynamiken, welche die Grenzen der Leistungsfähigkeit der nichtlinearen Zeitreihenanalyse verdeutlichte und damit die Verbesserung von bestehenden und die Entwicklung neuer Methoden und Konzepte motivierte.

Besonderes Augenmerk bei der geschilderten Entwicklung wurde auf das dynamische System Gehirn gerichtet [Lehnertz et al. 2000a, und Literaturstellen darin]. Eine Motivation der Anwendung der nichtlinearen Zeitreihenanalyse auf die durch das Elektroenzephalogramm (EEG) gemessene hirnelektrischen Aktivität kann durch das nichtlinear deterministische Verhalten individueller Neuronen erfolgen. Allerdings ist neuronale Dynamik durch die Interaktion einer Vielzahl von Neurone durch eine noch größere Anzahl von Synapsen höchst kompliziert. Die Anzahl der resultierenden Freiheitsgrade übersteigt die Anzahl der durch eine typische EEG-Messung pro Zeiteinheit erhaltenen Werte um viele Größenordnungen, so dass ein quasi infinit-dimensionales und damit linear stochastisches Erscheinungsbild des EEGs zu erwarten ist.

Viele Funktionen des Gehirns konnten erst durch das Studium seiner aus Verletzungen oder Pathologien resultierenden Fehlfunktionen verstanden werden, und so wurden auch durch die Erforschung des Anfallsleidens Epilepsie wichtige Informationen für viele Bereiche der Gehirnforschung gewonnen. Das während epileptischer Anfälle aufgezeichnete EEG ist im Vergleich zu dem des anfallsfreien Intervalls von hoher Amplitude und Regularität, mitunter sogar annähernd periodisch, was auf die Synchronisation sehr großer Neuronenverbände in bestimmten Bereichen des Gehirns zurückzuführen ist. Es kann weiter hypothetisiert werden, dass auch im anfallsfreien Intervall durch den epileptogener Prozess ein abnorm synchrones Verhalten von Neuronenverbänden induziert wird. Als Ursache dieser Synchronisation könnten dynamische Zwangsbedingungen angenommen werden, welche

die Kompliziertheit der neuronalen Dynamik reduzieren würden. Hierdurch könnte es insgesamt zu einer Demaskierung der auf der Wirkungsweise einzelner Neurone beruhenden nichtlinear deterministischen Natur hirnelektrischer Aktivität kommen.

Daraus ergibt sich als Ziel der vorliegenden Arbeit die Überprüfung der folgenden Hypothese: *Der epileptogene Prozess prägt dem sonst linear stochastischen Erscheinungsbild des EEG nichtlinear deterministische Charakteristika auf.* Dazu soll untersucht werden, inwieweit durch die Berechnung verschiedener linearer und nichtlinearer charakterisierender Maße aus Vielkanal-EEG-Registrierungen von Epilepsiepatienten die räumliche Verteilung und zeitliche Variabilität des epileptogenen Prozesses erfasst werden kann. Dazu werden EEG-Registrierungen analysiert, die im Rahmen der invasiven Phase der prächirurgischen Epilepsiediagnostik an der Bonner Universitätsklinik aufgezeichnet wurden. Als zentraler Ansatz wird dazu der Algorithmus zur Berechnung des *Anteils nichtlinearer Determinismen* (ξ) verwendet, der auf einer Kombination des coarse grained flow average [Kaplan und Glass 1992] und der Methode der Surrogatdaten [Schreiber und Schmitz 2000] beruht. Das Maß ξ wurde in eigenen Vorarbeiten [Andrzejak 1997] zur Differenzierung nichtlinear deterministischer und linear stochastischer Dynamiken entwickelt, und soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit durch Verwendung verbesserter Surrogatdaten und Modifikation der Berechnungsvorschriften weiterentwickelt und verbessert werden. Zur weiteren Überprüfung der genannten Hypothese soll auch die Gegenhypothese überprüft werden: *Der epileptogene Prozess ist hinreichend durch Änderungen der linearen Eigenschaften des EEGs zu beschreiben.* Dazu werden verschiedene Maße der linearen Zeitreihenanalyse verwendet. Zur weiteren Bewertung der Informationen, die durch ξ aus dem EEG gewonnen werden können, findet ein Vergleich mit dem neuronalen Komplexitätsverlust L^* statt, einem Maß der nichtlinearen Zeitreihenanalyse, welches sich zur Charakterisierung der räumlichen Verteilung und der zeitlichen Variabilität des epileptogenen Prozesses als geeignet erwiesen hat [Lehnertz und Elger 1995].

Diese Dissertation ist wie folgt gegliedert: In Kapitel 2 werden die grundlegenden Aspekte der Theorie dynamischer Systeme zusammengestellt und die zur ihrer Beschreibung verwendeten Termini eingeführt. Nachdem in Kapitel 3 die verwendeten Methoden der linearen und nichtlinearen Zeitreihenanalyse eingeführt werden, stellt Kapitel 4 die für diese Arbeit relevanten Aspekte der prächirurgischen Epilepsiediagnostik und des in diesem Rahmen gemessenen EEGs vor. Ein Überblick über den gegenwärtigen Stand Forschung wird

in Kapitel 5 gegeben. Die Anwendungen der in Kapitel 4 zusammengestellten Methoden auf EEG-Registrierungen werden in Kapitel 6 beschrieben. Die Arbeit schliesst mit einer Zusammenfassung in Kapitel 7 sowie einer Diskussion in Kapitel 8.

2 Theorie dynamischer Systeme

2.1 Dynamische Systeme

Ein dynamisches System sei durch d Variablen: $x_1(t), \dots, x_d(t)$ in seinem Verlauf mit der Zeit t vollständig beschreibbar. Dann kann eine geometrische Repräsentation der Dynamik durch Konstruktion eines zeitabhängigen Vektors in einem d -dimensionalen *Zustandsraum* erhalten werden:

$$\vec{X}(t) := (x_1(t), \dots, x_d(t)) \quad \vec{X}(t) \in \mathbb{R}^d \quad (1)$$

Mit der zeitlichen Entwicklung des System beschreibt die Spitze des Vektors $\vec{X}(t)$ die *Trajektorie* im Zustandsraum. Jeder Zustand des Systems ist eindeutig durch einen Punkt auf der Trajektorie repräsentiert. Im Falle der Existenz einer Abbildung F (Generator) zwischen allen möglichen Zuständen und der zukünftigen Entwicklung des Systems wird dieses als *deterministisch* bezeichnet:

$$\frac{\partial \vec{X}(t)}{\partial t} = F(\vec{X}(t)) \quad F : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \quad (2)$$

Dabei sind *lineare* Dynamiken durch die Linearität von F definiert. Ist F dagegen nicht-linear, wird durch die *Bewegungsgleichung* (2) eine *nichtlineare* Dynamik generiert. Für *stationäre* Dynamiken ist die Abbildung F nicht explizit zeitabhängig, das heisst $F \neq F(t)$. Nach Festlegung einer Anfangsbedingung $\vec{X}(t_0)$ kann durch Integration der Bewegungsgleichung der Fortlauf der Dynamik für alle Zeiten t bestimmt werden. *Konservative* dynamische Systeme sind definiert durch: $\text{div}F = \sum_{i=1}^d \partial F_i / \partial x_i = 0$. Bei diesen Dynamiken bleiben Phasenraumvolumina - aufgespannt durch verschiedene Systemzustände, welche zu finiten Lösungen der Bewegungsgleichung gehören - im Fortlauf der Zeit erhalten (Satz von Liouville [Kyupers 1989]). Im Gegensatz dazu stehen *dissipative* Dynamiken, für die $\text{div}F < 0$ gilt. Hier kontrahieren Zustandsraumvolumina, wobei Systemzustände über *Transienten* auf den *Attraktor* der Dynamik gezogen werden und dort verbleiben. Als Beispiele einfacher *regulärer Attraktoren* seien der Fixpunkt oder der Grenzyklus genannt.

Ferner sind *stetige* deterministische Systeme durch die Gültigkeit von

$$\vec{X}(t) \rightarrow \vec{X}(t)^* \Rightarrow F(\vec{X}(t)) \rightarrow F(\vec{X}(t)^*) \quad (3)$$

charakterisiert. Für diese gilt somit, dass aus ähnlichen gegenwärtigen Zuständen ähnliche zeitliche Entwicklungen in der nächsten Zukunft folgen. Trajektorien, deren generierende Dynamiken Gl. 2 genügen, können keine Selbstüberschneidungen besitzen. Ferner sind bei Gültigkeit von Gl. 3 benachbarte Segmente zueinander ausgerichtet, das heisst, es entsteht ein *deterministischer lokaler Fluss* im Zustandsraum.

Für *stochastische* dynamische Systeme existiert hingegen kein eindeutiger Zusammenhang der Art von Gl. 2 und 3. Einerseits bedeutet die fehlende Eindeutigkeit zwischen gegenwärtigen und zukünftigen Zuständen, dass Zustandsraumtrajektorien sich selbst schneiden können. Andererseits führt das Fehlen von Stetigkeit dazu, dass benachbarte Trajektoriensegmente beliebige Winkel einschließen können.

2.2 Chaotische dynamische Systeme - Komplexität

Durch nichtlineare Generatoren F können *chaotische* Dynamiken entstehen. Diese sind dadurch charakterisiert, dass alle im Zustandsraum benachbarten Zustände über lange Zeiten exponentiell auseinanderstreben müssen. Hiernach werden selbst für ursprünglich infinitesimale Abstände die Trajektorien fortan zu gleichen Zeiten verschiedene Regionen des Zustandsraumes aufsuchen. Durch diese auch als Schmetterlingseffekt bezeichnete *sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen* kommt es im Zustandsraum zur Ausbildung von so genannten *seltsamen Attraktoren*, welche sich in ihrer Geometrie durch *fraktale* Eigenschaften wie der Skaleninvarianz [Mandelbrot 1985] auszeichnen. Ein bekanntes Beispiel für eine chaotische Dynamik ist durch die Lorenz-Dynamik gegeben [Lorenz 1963]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= -\sigma x_1(t) + \sigma x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -x_1(t)x_3(t) + Rx_1(t) - x_2(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} &= +x_1(t)x_2(t) - bx_3(t) \end{aligned} \quad (4)$$

An diesem Beispiel kann verdeutlicht werden, dass durch einfache nichtlineare Generatoren ein äusserst kompliziertes dynamisches Verhalten hervorgerufen werden kann. Durch dieses Gegenüber von Einfachheit der Struktur, hier gegeben durch drei gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, und Kompliziertheit des zeitlichen Verhaltens (vgl.

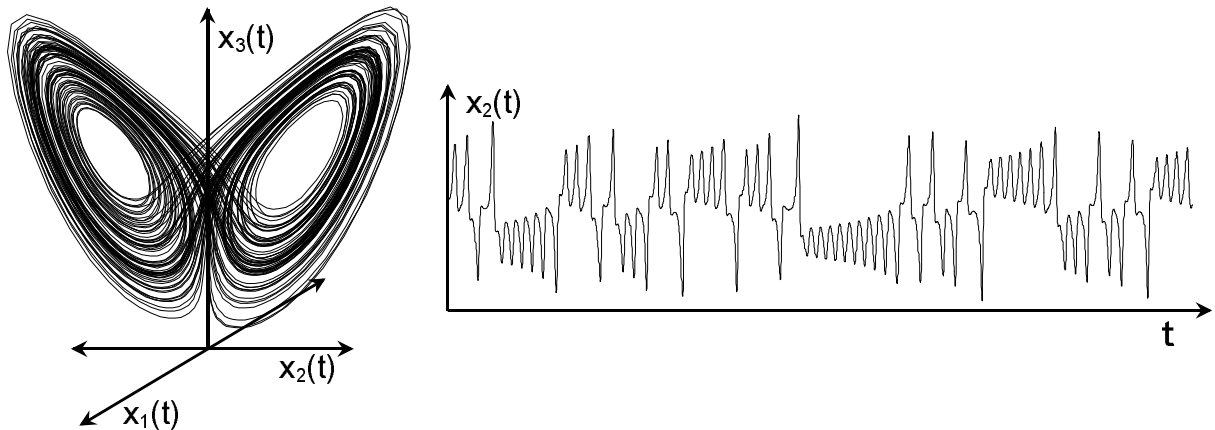


Abbildung 1: Links: Eine spezielle Lösung des Lorenz-Differentialgleichungssystems (Gl. 4) aufgetragen im 3-dimensionalen Zustandsraum. Als Parameter wurden $\sigma = 10$, $b = 8/3$ sowie $R = 28$ gewählt. Die Trajektorie befindet sich bereits auf dem Attraktor, Transienten sind nicht dargestellt. Rechts: x_2 -Komponente gegen die Zeit aufgetragen.

Abbildung 1) sind komplexe Dynamiken charakterisiert. Es sei abschliessend darauf hingewiesen, dass chaotische Dynamiken, wie auch im Fall der Lorenz-Dynamik, durchaus stetig sein können. Die Chaotizität äußert sich durch das Auseinanderstreben über lange Zeiträume, wohingegen Stetigkeit nach Gl. 3 über infinitesimale Zeiten definiert ist.

2.3 Rekonstruktion des Zustandsraumes

Sei nun durch Anwendung einer statischen monotonen Messfunktion g eine skalare Zeitreihe $y(t)$ an einem dynamischen System gewonnen

$$y(t) = g(\vec{X}(t)) \quad g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \quad (5)$$

Dann kann mit Hilfe von *Zeitverzögerungskoodinaten* eine Rekonstruktion der Dynamik in einem m -dimensionalen Zustandsraum erfolgen:

$$\vec{Y}(t) := (y(t), y(t - \tau), \dots, y(t - (m - 1)\tau)) \quad \vec{Y}(t) \in \mathbb{R}^m \quad (6)$$

Dabei werden τ als *Zeitverzögerung* und m als *Einbettungsdimension* bezeichnet. Takens konnte zeigen, dass für den Grenzfall unendlich langer Messdauer und infinitesimal kleiner Messungenauigkeit $\vec{Y}(t)$ topologisch ähnlich zu $\vec{X}(t)$ für alle Werte von τ ist [Takens 1981],

falls $m \geq 2d + 1$ gewählt wird [Whitney 1936]. Falls also benachbarte Segmente von $\vec{X}(t)$ zueinander ausgerichtet sind, ist dies aufgrund der Topologieerhaltung durch Zeitverzögerungskordinaten auch für $\vec{Y}(t)$ der Fall.

In der praktischen Anwendung von Zeitverzögerungskordinaten auf Größen, welche an realen Systemen gemessen wurden, treten allerdings einige Schwierigkeiten auf: Zunächst einmal kann eine Messung immer nur über endliche Zeiten und mit endlicher Genauigkeit erfolgen. Darüber hinaus erfolgen Messungen prinzipiell zeitdiskret, das heisst, es werden zu - durch das *Abtastintervall* Δt voneinander äquidistant entfernten - diskreten Zeitpunkten eine Folge von N skalaren Werten $\{y_n\}$ gewonnen:

$$y_n = y(n\Delta t) = g(\vec{X}(n\Delta t)) \quad n = 1, \dots, N \quad g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R} \quad (7)$$

Obwohl in der Mathematik der Begriff *Reihe* für Summenformeln verwendet wird, hat sich im deutschen Sprachraum für eine *Folge* von diskreten Werten $\{y_n\}$ der Begriff *Zeitreihe* etabliert. Gleichung 6 geht für Zeitreihen über in:

$$\vec{Y}_n := (y_n, y_{n-\tau}, \dots, y_{n-(m-1)\tau}) \quad n = 1, \dots, N - m\tau \quad \{\vec{Y}_n\} \in \mathbb{R}^m \quad (8)$$

Die Zeitverzögerung muss für Zeitreihen stets in ganzzahligen Vielfachen des Abtastintervalles gewählt werden. Weiterhin kann für Zeitreihen nur für einen begrenzten Bereich der Zeitverzögerung eine geeignete Rekonstruktion der Dynamik erreicht werden. Wird ein zu geringer Wert für τ gewählt, wird die Dynamik entlang der Hauptdiagonalen des Zustandsraumes gestreckt und nicht entfaltet. Wird hingegen ein zu hoher Wert gewählt, wird die Struktur überfaltet. Ein geeigneter Wert zwischen diesen beiden Fehleinbettungen muss für jede Dynamik eigens bestimmt werden. Häufig wird dazu der erste Nulldurchgang der Autokorrelationsfunktion (vgl. Kapitel 3.2.3) oder das Minimum der sogenannten *Mutual information function* verwendet [Broomhead und King 1986, Fraser und Swinney 1986]. Als weiteres Problem bei der Anwendung von Gl. 8 tritt auf, dass die Einbettungsdimension m *a priori* nicht sicher richtig gewählt werden kann, da die genuine Dimensionalität d des Systems nicht bekannt ist. Wird die Einbettungsdimension zu niedrig gewählt, besteht die Gefahr, dass Projektionen auftreten: es werden falsche Schnittpunkte oder falsche Nachbarschaften von Trajektoriensegmenten verursacht. Die Methode der *false nearest neighbors* zur Bestimmung geeigneter Werte der Einbettungsdimension beruht gerade darauf, die Abnahme der Anzahl benachbarter Trajektoriensegmente im Zustandsraum unter schrittweiser Erhöhung der Einbettungsdimension zu berechnen. Nur wenn (annähernd)

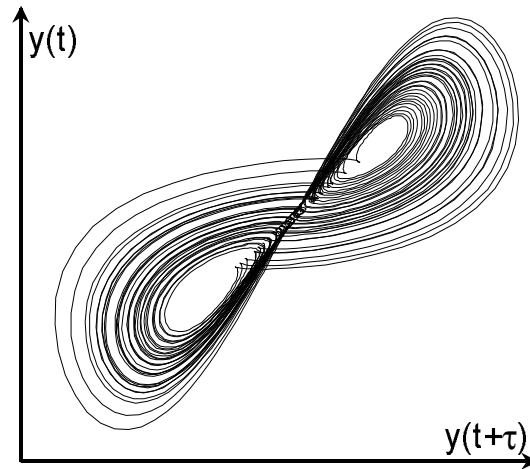


Abbildung 2: Zustandsraumrekonstruktion der Lorenz-Dynamik. Die hier verwendete Einbettungsdimension von $m = 2$ ist natürlich zu gering, so dass es zu durch Projektionen hervorgerufenen Selbstüberschneidungen der Trajektorie kommt.

alle Nachbarn in m Dimensionen auch Nachbarn in $m + 1$ Dimensionen sind, kann der Wert von m für eine (annähernd) projektionsfreie Rekonstruktion der Dynamik ausreichen [Kennel et al. 1992, Abarbanel und Kennel 1993]. Wie ein Blick auf Gl. 8 zeigt, wird der zeitliche Abstand der ersten und der letzten Komponente der Zeitverzögerungskordinaten durch das Produkt $(m - 1)\tau$ bestimmt. Häufig ist eine geeignete Wahl dieses Produktes und nicht so sehr die der einzelnen Größen entscheidend für eine geeignete Rekonstruktion der Dynamik.

3 Lineare und nichtlineare Zeitreihenanalyse

3.1 Einleitung

Die Charakterisierung und Klassifikation dynamischer Systeme anhand der Untersuchung ihres zeitlichen Verhaltens ist Aufgabengebiet der Zeitreihenanalyse. Einerseits kann eine Zuordnung zu diskreten Klassen, wie zum Beispiel linear oder nichtlinear, deterministisch oder stochastisch, erfolgen. Andererseits können verschiedene Eigenschaften dynamischer Systeme durch charakterisierende Maße auf kontinuierliche Skalen abgebildet werden. Dynamiken, die aus einer Überlagerungen verschiedener Klassen hervorgehen, können auf Skalen abgebildet werden, welche die einzelnen Klassen als Extremwerte besitzen.

Zur Beschreibung linearer dynamischer Systeme sind unter anderem statistische Momente (Kap. 3.2.1), das Frequenzspektrum (Kap. 3.2.2) sowie davon abgeleitete Maße (Kap. 3.2.3) geeignet. Insbesondere über das Frequenzspektrum kann eine Unterscheidung linear stochastischer und linear deterministischer Dynamiken erfolgen. Dahingegen können lineare und nichtlineare Dynamiken mit mit keinem dieser Ansätze sicher unterschieden werden.

Erst die Behandlung komplexer chaotischer Dynamiken [Schuster 1989] erbrachte eine Reihe von Ansätzen zu dieser Trennung sowie zu einer weiterführenden Charakterisierung nichtlinearer dynamischer Systeme [Kantz und Schreiber 1997]. Zur Unterscheidung deterministischer und stochastischer Dynamiken wurde eine ganze Reihe verschiedener Ansätze vorgeschlagen. Dabei kann die Güte der Vorhersagbarkeit zukünftiger Zustände - beruhend auf Informationen über vergangene Systemzustände - als Kriterium verwendet werden [Casdagli 1989, Sugihara und May 1994, Wayland et al. 1993, Kaplan 1994, Salvino und Cawley 1994]. Ein alternativer Ansatz findet in der in Abschnitt 3.3.1 vorgestellten Methode des *coarse grained flow average* [Kaplan und Glass 1992, 1993] Verwendung. Der in Kapitel 3.3.2 vorgestellte Schätzer einer effektiven Korrelationsdimension [Grassberger 1983, Grassberger und Procaccia 1983a, 1983b] kann zur Abschätzung der durch deterministische Dynamiken besetzten Freiheitsgrade im Zustandsraum dienen. Seltene Attraktoren sind durch nicht ganzzahlige Werte der Dimension von regulären Attraktoren mit ganzzahligen Dimensionswerten zu unterscheiden. Wäre eine exakte Bestimmung der Dimension möglich, was aufgrund der endlichen Zeitreihenlänge und Messgenauigkeit jedoch nicht immer der Fall ist, könnten chaotische und reguläre Dynamiken sicher unter-

schieden werden. Zur Differenzierung linearer und nichtlinearer Dynamiken kann das in Kapitel 3.4 beschriebene Konzept der Surrogatdaten dienen [Theiler et al. 1992a]. Dieses Konzept wurde in neueren Arbeiten jedoch in der Weise verallgemeinert, dass mit ihm fast beliebige Hypothesen über die Natur einer Dynamik überprüft werden können [Schreiber 1998]. So werden im Rahmen dieser Arbeit Surrogate zum einen zur Bestimmung des *Anteils nichtlinearer Determinismen* (Kapitel 3.5.3), aber zum anderen auch für einen Test auf schwache Stationarität verwendet (Kapitel 3.5.2). Wie in Abschnitt 2.2 angeführt, sind chaotische Dynamiken durch ein exponentielles Auseinanderstreben benachbarter Trajektoriensegmente ausgezeichnet. Durch das Spektrum der *Lyapunov-Exponenten* und dabei insbesondere durch den größten Lyapunov-Exponenten [Kantz 1994, und darin enthaltene Literaturhinweise] wird die Stärke dieser Divergenz beschrieben. Der Informationsgehalt eines dynamischen Systems wird in der Zeitreihenanalyse durch die *Kolmogorov-Sinai-Entropie* beschrieben [Kolmogorov 1968]. Der im rekonstruierten Zustandsraum berechnete Kreuzvorhersagefehler wurde zur Untersuchung von Nichtstationaritäten in deterministischen Dynamiken entwickelt [Schreiber 1997]. Neben den geschilderten *univariaten* Verfahren, in denen dynamische Systeme stets nur anhand der Eigenschaften einer einzelnen Zeitreihe untersucht werden, wurden eine Reihe von *bivariaten* Verfahren vorgeschlagen [Schiff et al. 1996, Arnhold et al. 1999, Mormann et al. 2000a]. Hier soll durch die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen zwei an verschiedenen dynamischen Systemen oder innerhalb von ausgedehnten Systemen gemessenen Zeitreihen auf gegebenenfalls vorhandene Interaktionen zwischen diesen Systemen oder Teilsystemen geschlossen werden.

Für die sich nun anschließende Einführung der verschiedenen im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Maße und deren zugrundeliegenden Algorithmen werden an einigen Stellen beispielhafte Zeitreihen eingesetzt. Dazu werden neben Zeitreihen von Modellsystemen auch einzelne EEG-Zeitreihen verwendet, da gerade deren spezielle Eigenschaften gewisse Anforderungen an die Methoden stellen. Diese EEG-Zeitreihen sowie die verwendeten Bezeichnungen finden sich in den Abbildungen 21 und 22 und sollen bis zu ihrer eingehenden Behandlung in Kapitel 6.2 Repräsentanten von Zeitreihen einer unbekanntenen Dynamik darstellen. Zur Untersuchung von Zeitreihen ist die Festlegung einer geeigneten Datenpunktzahl erforderlich. Wie in den Kapiteln 4.3 und 3.2.2 begründet und bereits in [Andrzejak 1997] durchgeführt, wird in dieser Arbeit durchweg eine Datenpunktzahl von $N = 4096$ verwendet.

3.2 Lineare charakterisierende Maße

3.2.1 Statistische Momente

Die statistischen Momente m_n einer Zeitreihe $\{y_n\}$ geben Auskunft über die Lage, Breite und Form ihrer Amplitudenhäufigkeitsverteilung [Press et al. 1989]:

$$m_0 = \overline{\{y_n\}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \quad (9)$$

$$m_1 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} |y_n - \overline{\{y_n\}}| \quad (10)$$

$$m_2 = \sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - \overline{\{y_n\}})^2 = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} y_n^2 - N \overline{\{y_n\}}^2 \right) \quad (11)$$

$$m_3 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{y_n - \overline{\{y_n\}}}{\sigma} \right)^3 \quad (12)$$

$$m_4 = \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{y_n - \overline{\{y_n\}}}{\sigma} \right)^4 \right) - 3 \quad (13)$$

Dem Mittelwert m_0 , der Summe der absoluten Abweichungen m_1 und der Varianz m_2 , folgen als drittes und viertes Moment die Skewness m_3 und Kurtosis m_4 , welche üblicherweise mit Hilfe der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{m_2}$ normiert werden. Für eine durch ihren Mittelwert und ihre Varianz vollständig charakterisierte Normalverteilung verschwinden Skewness und Kurtosis im Grenzfall $N \rightarrow \infty$. Die Standardabweichung der für Normalverteilungen endlicher Datenpunktanzahlen berechneten Skewness um den Erwartungswert von null beträgt näherungsweise $\sqrt{15/N}$. Für die Kurtosis beträgt dieser Wert $\sqrt{96/N}$. Schiefe Verteilungen besitzen im Betrag signifikant höhere Werte der Skewness, wobei das Vorzeichen auf die Ausrichtung dieser Schiefe hinweist. Positive Werte der Kurtosis entsprechen Verteilungen, welche spitzer als die Normalverteilung sind, negative Werte werden für flachere Verteilungen erhalten.

Bis auf den Mittelwert werden alle genannten statistischen Momente als charakterisierende Maße eingeführt. (Der Mittelwert einer Zeitreihen hat nur dann eine Bedeutung,

wenn durch sie der Ausschnitt einer fortlaufenden Entwicklung einer Größe beschrieben wird, die nicht beschränkt ist und sich aperiodisch über ganz verschiedene Skalenbereiche bewegt, was für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten EEG-Zeitreihen nicht der Fall ist.) Die Standardabweichung ist der Gesamtenergie der Zeitreihe proportional (vgl. auch Kapitel 3.2.2). Durch die Skewness und Kurtosis kann die Nullhypothese, dass die Daten normalverteilt sind, überprüft werden. Eine signifikante Abweichung von der Normalverteilung kann dabei als Hinweis auf das Zugrundeliegen von Nichtlinearität gedeutet werden (vgl. auch Kapitel 3.4). Abschließend sei angemerkt, dass nicht die Skewness, sondern ihr Betrag als charakterisierendes Maß eingeführt wird, da nur die Ausprägung der Schiefe der Verteilung, nicht aber ihre Ausrichtung von Interesse ist.

3.2.2 Frequenzspektrum

Vor der formalen Einführung des Frequenzspektrums soll zu Beginn dieses Abschnittes kurz veranschaulicht werden, inwiefern das Frequenzspektrum die linearen Eigenschaften eines dynamischen Systems beschreibt. Hinsichtlich einer exakten Behandlung des Formalismus und dabei insbesondere der Beschreibung des Übergangs zwischen den Räumen kontinuierlicher Funktionen zu zeitdiskreten Folgen, respektive der kontinuierlichen auf die diskrete Fouriertransformation, wird auf die Spezialliteratur verwiesen [Brigham 1992].

Aus der Mathematik stammt das Konzept der Vektorräume (siehe z. B.: [Fischer 1989]), welche durch eine Basis, das heisst einen vollständigen Satz von orthonormalen Basisvektoren, aufgespannt werden. Die Vollständigkeit garantiert dabei, dass jedes Element des Vektorraumes als eine Linearkombination der Basisvektoren dargestellt werden kann. Die Koeffizienten dieser Linearkombination werden durch Projektion des Vektorraumelementes auf die jeweiligen Basisvektoren erhalten. Wird nun die Menge aller komplexwertigen, beschränkten Funktionen als Vektorraum aufgefasst [Forster 1991], so können die oszillatorischen Lösungen von linearen Differentialgleichungen als eine Basis (B) dienen. Durch B ist eine kanonische Beschreibung linearer deterministischer Systeme gegeben, das heisst, es handelt sich um eine Eigenwertdarstellung des Zustandsraums ihrer zeitlichen Entwicklung. Insbesondere kann das Zeitverhalten linearer deterministischer dynamischer Systeme durch eine *abzählbare* Menge von Vektoren aus B dargestellt werden. Zur Darstellung stochastischer linearer Systeme, welche auch als Superposition unendlich vieler linear deterministischer Systeme angesehen werden können, bedarf es dagegen einer *überabzählbaren*

Menge von Basisvektoren. Dadurch kann mit Hilfe des Frequenzspektrums eine Differenzierung zwischen linear stochastischen und linear deterministischen Dynamiken erreicht werden. Wenngleich aufgrund der Vollständigkeit von B auch das Zeitverhalten beliebiger nichtlinearer deterministischer Dynamiken dargestellt werden kann, handelt es sich dabei um eine denkbar ungeeignete Darstellung, da zu ihrer Beschreibung ebenfalls immer eine *überabzählbare* Menge von Vektoren erforderlich ist. Somit sind nichtlinear deterministische Dynamiken in dieser Eigenschaft nicht von stochastischen Dynamiken zu unterscheiden.

Die diskrete Fouriertransformation Durch die diskrete Fouriertransformation

$$FT(\{y_n\}) : s_k := \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{i\frac{2\pi kn}{N}} \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} \quad (14)$$

wird ein beliebiges Element des Vektorraumes der Menge der komplexwertigen Zeitreihen (hier $\{y_n\}$) auf die diskreten Basisvektoren der harmonischen Schwingung der Frequenz $f_k = k/N\Delta t$ projiziert. Die zu Gl. 14 inverse Transformation wird durch

$$FT^{-1}(\{s_k\}) : y_n := \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} s_k e^{-i\frac{2\pi kn}{N}} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (15)$$

gegeben. Das Abtastintervall Δt (vgl. Kapitel 2.3) bestimmt die höchste durch Gl. 14 darstellbare Frequenz, die so genannte *Nyquist-Frequenz* $f_{Nyq} = 1/2\Delta t$. Die diskrete Fouriertransformation ist linear, d.h. $FT(\{a_n\} + \{b_n\}) = FT(\{a_n\}) + FT(\{b_n\})$. Das komplexwertige Bild $\{s_k\}$ wird dabei als *Fouriertransformierte* oder *Frequenzspektrum* bezeichnet. Die einzelnen s_k erhalten die Bezeichnung *Fourierkoeffizienten*. Der Raum der Bilder wird als *Frequenzraum* bezeichnet. In diesem Zusammenhang wird der Raum der Urbilder, beziehungsweise der Bilder von Gl. 15 auch als *Zeitraum* bezeichnet. In der bekannten Amplituden-Phasendarstellung komplexer Zahlen erhalten die Fourierkoeffizienten die Form

$$s_k = a_k e^{i\phi_k} \quad a_k, \phi_k \in \mathbb{C} \quad (16)$$

Das *Leistungsspektrum* $\{S_k\}$, gegeben durch

$$S_k := |s_k|^2 = |a_k|^2 \quad (17)$$

wird allein durch die Amplituden der Fourierkoeffizienten bestimmt. Das Parsevalsche Theorem

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} |s_k|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |y_n|^2 \quad (18)$$

besagt, dass die Gesamtenergie E der Zeitreihe sowohl im Zeit- als auch im Frequenzraum berechnet werden kann. Ferner zeigt sich durch Einsetzen von $k = 0$ in Gl. 14, dass s_0 dem Mittelwert der Zeitreihe nach Gl. 9 proportional ist. Daraus und aus Gl. 18 folgt, dass auch die Varianz gemäß Gl. 11 eindeutig durch das Leistungsspektrum $\{S_k\}$ festgelegt ist. Für den Spezialfall reeller Urbilder $\{y_n\} \in \mathbb{R}$ gilt folgende wichtige Symmetrieeigenschaft der Fouriertransformierten:

$$s_k = -s_{-k} \quad (19)$$

Daraus folgt direkt, dass für reelle Zeitreihen die Betrachtung der Fouriertransformierten auf positive Werte von f_k , respektive von k , beschränkt werden kann.

Für die praktische Benutzung der Fouriertransformation ist das Folgende von Bedeutung. Die Anzahl der zur Berechnung von Gl. 14 erforderlichen Rechenoperationen ist proportional zum Quadrat der Datenpunktanzahl und damit mitunter sehr hoch. Weist jedoch die Primfaktorenzerlegung der Datenpunktanzahl viele Faktoren auf, kann aufgrund von Redundanzen die Anzahl der Rechenoperationen erheblich reduziert werden [Press et al. 1989]. Für den Grenzfall maximaler Anzahl von Primfaktoren, beim dem die Datenpunktanzahl einer ganzzahligen Potenz von 2 entspricht: $N = 2^\gamma$, $\gamma \in \mathbb{N}$, kann schließlich der Algorithmus der *Fast Fourier Transformation* (FFT) [Brigham 1992] eingesetzt werden, dessen Rechenoperationsanzahl proportional zu $N \log N$ ist. Es existieren zwar auch effiziente Algorithmen zur Berechnung der Fouriertransformation aus Zeitreihen beliebiger Datenpunktanzahl, jedoch sind diese immer wesentlich langsamer als FFT-Algorithmen.

3.2.3 Vom Frequenzspektrum abgeleitete charakterisierende Maße

Energiebänder Nach der Zerlegung in einzelne Fourierkoeffizienten ist häufig der erste Schritt der Auswertung von Frequenzspektren, Teilintervalle $[f_l, \dots, f_h]$ des Leistungsspektrums wiederum zu *Frequenzbändern* zusammenzufassen und die Amplituden der Koeffizi-

enten in diesen Bändern zu summieren:

$$E_{FB} = \frac{1}{N\Delta t(f_h - f_l)E} \sum_{k=N\Delta t f_l}^{N\Delta t f_h - 1} |\tilde{s}_k|^2 \quad (20)$$

Als charakterisierende Maße werden die in der EEG-Analyse als Standard geltenden Frequenzbänder (vgl. Kapitel 4.3) verwendet: Das E_δ -Band wird begrenzt durch $f_l = 0,01$ Hz sowie $f_h = 4$ Hz. Ferner wurden definiert E_θ (4 – 8 Hz), E_α (8 – 13 Hz), E_β (13 – 30 Hz). Da für EEG-Zeitreihen nur äußerst wenig Energie im Frequenzbereich oberhalb von 30 Hz liegt, gilt aufgrund der Normierung in Gl. 20:

$$E_\delta + E_\theta + E_\alpha + E_\beta \approx 1 \quad (21)$$

Die Autokorrelationsfunktion Die Autokorrelationsfunktion $\{C_\tau\}$ einer Zeitreihe ist durch die Faltung der Zeitreihe mit sich selbst gegeben:

$$C_\tau = \sum_{n=0}^{N-1} y_{n+\tau} y_n \quad \tau = 0, \dots, N-1 \quad (22)$$

Aus dem Faltungssatz, nach dem Faltungen im Zeitraum Multiplikationen im Frequenzraum entsprechen und umgekehrt, folgt das Wiener-Khinchin-Theorem:

$$\{C_\tau\} = FT(\{S_k\}) \quad (23)$$

Demnach ist auch die Autokorrelationsfunktion eindeutig durch das Leistungsspektrum festgelegt. Während die Autokorrelationsfunktion periodischer Signale ihrerseits wieder periodisch ist, fällt sie für weißes Rauschen schnell ab und schwankt im weiteren Verlauf in geringer Amplitude um null (vgl. Abbildung 3, links). Die Geschwindigkeit des Abfallens von $\{C_\tau\}$ kann als Informationsverlustrate aufgefasst werden. Ob der Grund für den Informationsverlust in einer Stochastizität oder in einer Chaotizität der Zeitreihe liegt, kann jedoch nicht entschieden werden: Wie beispielhaft an der Gegenüberstellung der Autokorrelationsfunktionen einer linear stochastischen Zeitreihe und der nichtlinear deterministischen Lorenz-Dynamik (vgl. Abbildung 3, rechts) gezeigt, können diese beiden Dynamikklassen durch $\{C_\tau\}$ nicht unterschieden werden. Nichtsdestoweniger sei unter Verwendung der Eulerschen Zahl e durch

$$\tau_{1/e} := \tau_{\{C_\tau \leq \frac{1}{e} C_0\}_{\min}} \quad (24)$$

die *Zerfallszeit* der Zeitreihe als charakterisierendes Maß eingeführt.

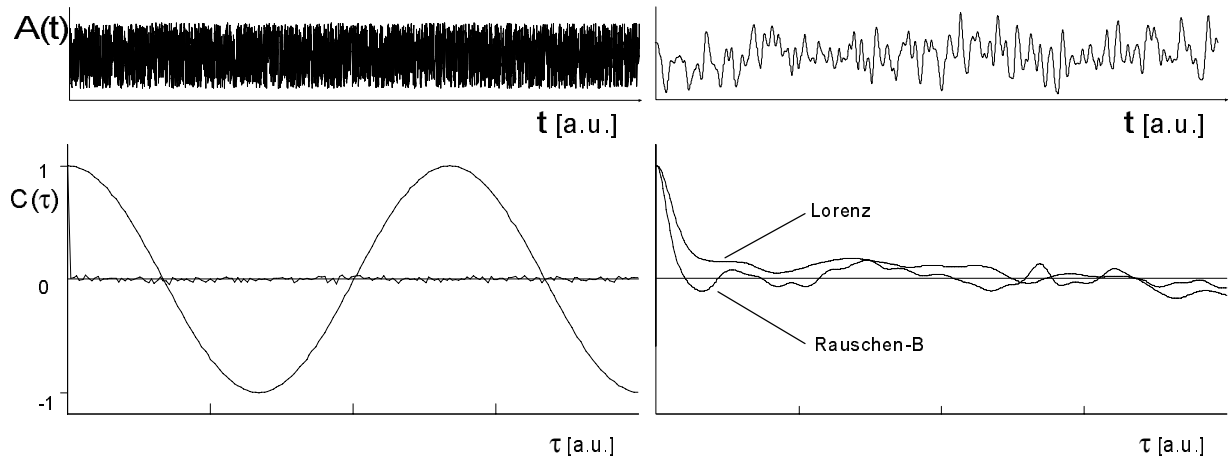


Abbildung 3: Oben: Stochastische Zeitreihen mit einem weißen Leistungsspektrum (links, Rauschen-A) sowie mit einem durch niedrige Frequenzen bestimmten Spektrum (rechts, Rauschen-B). Unten: Vergleich der Autokorrelationsfunktionen (Gl. 22) dieser stochastischen Zeitreihen mit denen von deterministischen Zeitreihen. Links: Rauschen-A versus Sinus-Zeitreihe. Rechts: Lorenz-Zeitreihe (vgl. Abbildung 1, rechts) versus Rauschen-B.

3.3 Nichtlineare charakterisierende Maße

3.3.1 Coarse grained flow average

In Kapitel 2.1 wurde angeführt, dass stetige deterministische Dynamiken einen lokalen Fluss im Zustandsraum ausbilden, ein Charakteristikum, welches durch die topologieerhaltenden Eigenschaften von Zeitverzögerungskoodinaten auch auf die mit ihrer Hilfe rekonstruierte Dynamiken übertragen wird. Auf diesem Kriterium aufbauend wurde von Kaplan und Glass der im Folgenden beschriebene Algorithmus zur Berechnung des *coarse grained flow average* vorgeschlagen [Kaplan und Glass 1992, 1993]: Der mit Zeitverzögerungskoodinaten gebildete m -dimensionale Zustandsraum wird in b^m nichtüberlappende Hyperkuben unterteilt, wobei b die Anzahl der Hyperkuben pro Zustandsraumachse bezeichnet. Sei der Kubus mit Index j insgesamt a_j -mal von der Trajektorie durchlaufen, dann wird für jeden Durchlauf i ein normierter Vektor $\vec{v}_{i,j}$ ($i = 1, \dots, a_j$) gebildet, dessen Richtung durch Verbindung der Punkte bestimmt wird, an denen die Trajektorie in den Kubus ein- und wieder aus dem Kubus austritt. Nach Vektoraddition aller $\vec{v}_{i,j}$ zum resultierenden Vektor